DETERMINANTES FICHA 2

Demuestra sin desarrollar, es decir, aplicando las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 5

c) $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ac \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ p & q & r \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$

SOLUCIONES

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = (C_2+C_3)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & a+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & a+c \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

el último determinante tiene iguales la primera y la segunda columnas

b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ hemos sacado 5 factor común de la tercera columna, entonces el determinante da 5 por otro número, es decir, múltiplo de 5.

c) $\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ac \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = abc\cdot\dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ac \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & abc \\ b^3 & b^2 & abc \\ c^3 & c^2 & abc \end{vmatrix} =$ multiplicamos y dividimos por abc, multiplicamos la 1ª fila por a, la 2ª por b y la tercera por c , ya solo queda dividir la tercera columna por el abc que sigue fuera y tendremos el determinante pedido

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & abc \\ b^3 & b^2 & abc \\ c^3 & c^2 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

d) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = (C_1+C_2-C_3)\begin{vmatrix} 2b & b+c & c+a \\ 2q & q+r & r+p \\ 2y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix} =$

$$= (C_2-C_1)2\begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix} = (C_3-C_2)2\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} = (C_1 \leftrightarrow C_3)-2\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} =$$

$$= (C_2 \leftrightarrow C_3)-(-2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

e) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1 \end{matrix}\right\}\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} F_3-F_2 \\ F_2-F_1 \end{matrix}\right\}a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$